PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

Soit u la fonction numérique définie par :

$$u(x) = 0 \qquad \forall\, x < 0$$
$$= 1 \qquad \forall\, x > 0$$
$$u(0) = \frac{1}{2}$$

A tout entier naturel $n > 0$, on associe la fonction numérique u_n définie par :

$$u_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} u(t)\, dt .$$

1° Calculer $u_n(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. La fonction u_n est-elle continue sur $\mathbf{R}$? Est-elle dérivable sur $\mathbf{R}$?

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}$, d'axes Ox, Oy, représenter le graphe de la fonction u_n. Trouver une fonction numérique g_n définie sur $\mathbf{R}$, continue à droite au point $x = -1$, à gauche au point $x = 1$, telle que u_n puisse s'exprimer sous la forme :

$$u_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, g_n(x-t)\, dt .$$

2° Soit, pour n entier naturel donné ($n > 0$), φ_n la fonction numérique définie par :

$$\varphi_n(x) = n \cos^2\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \qquad \forall\, x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$
$$= 0 \qquad \forall\, x \notin \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

On désigne par U_n la fonction numérique définie par

$$U_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, \varphi_n(x-t)\, dt .$$

Calculer $U_n(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. La fonction U_n est-elle continue, dérivable sur $\mathbf{R}$? La représenter graphiquement.

3° Calculer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ les limites de $u_n(x)$ et de $U_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

Calculer les bornes supérieures suivantes :

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |\, u_n(x) - u(x)\,| \quad ; \quad \sup_{x \in \mathbf{R}} |\, U_n(x) - u(x)\,| .$$

Tendent-elles vers zéro lorsque n tend vers l'infini?

II

Soit ρ une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ et ayant les propriétés suivantes :

a. ρ est continue et à valeurs positives dans $\mathbf{R}$

b. il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\rho(x) = 0 \qquad \forall\, x \notin [-\alpha, \alpha]$$

c.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\, dx = 1 .$$

Pour tout entier naturel $n > 0$, posons :

$$\rho_n(x) = n\rho(nx)$$

A toute fonction f définie sur $\mathbf{R}$ et intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbf{R}$ associons la fonction $(f * \rho_n)$ définie par :

$$(f * \rho_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \rho_n(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, \rho_n(t)\, dt .$$

1° Montrer que

$$|\, f(x) - (f * \rho_n)(x)\,| \leqslant \int_{-\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\alpha}{n}} |\, f(x) - f(x-t)\,|\, \rho_n(t)\, dt .$$

Calculer, en tout point x où f est continue, la limite de $(f * \rho_n)(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

2° Dans l'hypothèse où f est continue sur l'intervalle ouvert non vide $]a, b[$, on désigne par λ un nombre > 0 tel que $a + \lambda < b - \lambda$. Utilisant le fait que f est continue sur l'intervalle *fermé*

$$\left[a + \frac{\lambda}{2}, b - \frac{\lambda}{2}\right],$$

démontrer la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N} : \forall n \geqslant N_\varepsilon, \forall x \in [a + \lambda, b - \lambda], \Rightarrow$$
$$|f * \rho_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

3° Dans cette question, on suppose f continue sur $\mathbf{R}$. Soit $[c, d]$ un intervalle fermé de $\mathbf{R}$. Utilisant la continuité de f sur $[c - \alpha, d + \alpha]$, calculer la limite, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et pour tout $x \in [c, d]$ de :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} [f(x - t + h) - f(x - t)] \rho_n(t)\, dt$$

lorsque h tend vers 0. Les fonctions $(f * \rho_n)$ sont-elles continues sur $\mathbf{R}$?

Dans l'hypothèse où ρ_n est continûment dérivable sur $\mathbf{R}$, calculer, pour tout $x \in [c, d]$, la limite lorsque h tend vers 0 de

$$\int_{c-\alpha}^{d+\alpha} |f(t)(\rho'_n(x - t + h) - \rho'_n(x - t))|\, dt.$$

La fonction $(f * \rho_n)$ est-elle dérivable sur $\mathbf{R}$? Si oui, donner sa dérivée.

4° u désignant la fonction définie dans la partie I, calculer $(u * \rho_n)(x)$, pour tout $x \in \mathbf{R}$. On pourra poser :

$$\int_{-\infty}^{x} \rho_n(t)\, dt = r_n(x).$$

x_0 étant un nombre réel quelconque, soit u_{x_0} la fonction définie par :

$$u_{x_0}(x) = u(x - x_0)$$

Calculer $(u_{x_0} * \rho_n)(x)$, pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Vérifier :

que les fonctions $(u * \rho_n)$ et $(u_{x_0} * \rho_n)$ sont continues sur $\mathbf{R}$,

que, si ρ_n est k fois continûment dérivable, il en est de même des fonctions $(u * \rho_n)$ et $(u_{x_0} * \rho_n)$; donner pour tout $i \leqslant k$ leurs dérivées i^e en tout point $x \in \mathbf{R}$.

5° On suppose f continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, les points de discontinuité de première espèce étant en nombre fini :

$$a_1 < a_2 \ldots < a_i < \ldots < a_p.$$

On pose

$$f(a_i + 0) - f(a_i - 0) = \delta_i \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

Démontrer, en utilisant les résultats précédents, que $(f * \rho_n)$ est continue sur $\mathbf{R}$ et que, si ρ_n est k fois dérivable sur $\mathbf{R}$, il en est de même de $(f * \rho_n)$.

III

1° p et q désignant deux entiers naturels > 0, a et b deux réels tels que $a < b$, on pose :

$$I(p, q) = \int_a^b (x - a)^p (b - x)^q\, dx.$$

Démontrer que $I(p, q) = I(q, p)$. Calculer la valeur du rapport :

$$\frac{I(p, q)}{I(p + 1, q - 1)}$$

puis celle de l'intégrale $I(p, q)$.

2° Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\, dx.$$

Donner la valeur de a_n, et vérifier que $a_n \geqslant \frac{1}{n + 1}$.

3° Pour tout entier naturel $n > 1$, on pose :

$$h_n(x) = \frac{1}{a_n}(1 - x^2)^n \qquad \forall x \in [-1, +1]$$
$$= 0 \qquad \forall x \notin [-1, +1]$$

La fonction h_n ainsi définie est-elle dérivable sur $\mathbf{R}$? Admet-elle des dérivées de tous ordres continues sur $\mathbf{R}$?

4° Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbf{R}$, telle que $f(x) = 0$, pour tout $x \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. A tout entier $n > 0$, on associe la fonction $(f * h_n)$ définie par :

$$(f * h_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, h_n(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, h_n(t)dt.$$

Montrer que la restriction de $(f * h_n)$ à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ est une fonction polynôme. Que peut-on dire de son degré?

5° Peut-on choisir $\delta \in]0, 1[$ pour que :

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} [f(x) - f(x-t)]\, h_n(t)dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad (\varepsilon > 0 \text{ donné})?$$

δ étant ainsi choisi, montrer que si $x \in]-1-\delta[\cup]\delta, 1[$

$$|h_n(x)| \leqslant (n+1)(1-\delta^2)^n.$$

En déduire qu'il existe n_0 tel que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \left| \int_{-1}^{-\delta} [f(x) - f(x-t)]\, h_n(t)\, dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Démontrer alors la propriété suivante :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}$:

$$n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - (f * h_n)(x)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

(On dit alors que $f * h_n$ approche uniformément f sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$).

6° Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Chercher à démontrer, en utilisant les résultats précédents, que f peut être approchée uniformément sur $[a, b]$ par une suite de fonctions polynômes. (On essaiera de définir judicieusement la fonction g continue sur $\mathbf{R}$, nulle en dehors d'un intervalle $[c, d] \supset [a, b]$, et dont la restriction à $[a, b]$ soit f.)

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail